Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. DIAGONALIZACIÓN

1. Estudiar si la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 3 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 5 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 7 & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

2. Demostrar que para cualquier $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ matriz triangular (superior o inferior) sus autovalores son los elementos de la diagonal. ¿Es A siempre diagonalizable? (AYUDA: considera la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ con todos los elementos nulos salvo $a_{12} = 1$).

3. Demostrar que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene los autovalores $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 1, y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica 2.

   (i) Encontrar una matriz diagonal D y una matriz invertible P tales que $D = P^{-1}\,A\,P$.

   (ii) Determinar la matriz A^{28} utilizando el apartado anterior.

4. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables y, en caso afirmativo, indicar las matrices diagonales que se pueden obtener a partir de las matrices dadas:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Demostrar que $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ es inversible si y solo si 0 NO es autovalor de A.

6. Sea $A \in \mathrm{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ con autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Entonces, se pide:

   a) Calcular los autovalores de la traspuesta de A (A^t).

   b) Calcular los autovalores y autovectores de A^2, $A^3, \ldots A^k$ ($k \in \mathbb{N}$).

   c) Calcular los autovalores y autovectores de A^{-1}.

   d) Si A es diagonalizable, ¿son A^t, A^2 ó A^{-1} diagonalizables? Razona tus respuestas y en caso afirmativo calcula sus diagonalizaciones.

7. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$. Estudiar cuándo A es diagonalizable (en función del signo de $a^2 + 4b$).

8. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y sólo si $b = 0$.

9. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3x3}(\mathbb{R}).$$

¿Para qué valores de α y β es A diagonalizable? En los casos en los que A sea diagonalizable calcular P y D.

10. Diagonaliza, si es posible, las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

11. Hallar los autovalores y los autoespacios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{3x3}(\mathbb{R})$$

Indicar si es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular una matriz diagonal D y una matriz de cambio de base P que cumpla $P^{-1}AP = D$.

12. Estudiar si la siguiente matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, calcular A^n:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$$

¿Es diagonalizable A? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D, indicando qué matriz de cambio de base P se utiliza.

14. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R})$$

Calcular los valores propios y vectores propios de A ¿es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$? Razonar la respuesta y, si es posible, indicar D y P.

15. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$$

Calcular el polinomio característico y los valores propios (reales) de A. ¿Es A diagonalizable? Razonar la respuesta y si es posible calcular una matriz diagonal D e indicar una matriz P inversible que cumpla $P^{-1}AP = D$. Calcular A^{99} (sin realizar el producto directamente).

16. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R}).$

¿Es diagonalizable A? Razonar la respuesta y, si es posible, calcular una matriz diagonal D y la matriz de cambio de base P que se emplea para obtener dicha matriz D.

17. Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4x4}(\mathbb{R})$.

¿Es diagonalizable A? Razona tu respuesta y, si es posible, calcula una matriz diagonal D semejante a A y la matriz de cambio de base P que estás empleando para obtener dicha matriz D.

18. Consideremos la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Calcular los valores propios de A y su multiplicidad algebraica.

(ii) ¿Es diagonalizable? Razonar la respuesta.

(iii) Calcular si es posible una matriz inversible P y una matriz diagonal D que cumplan $P^{-1}AP = D$.

(iv) Calcular la potencia A^{100}.

19. Determínese los autovalores y autovectores de los siguientes endomorfismos dados por:

- $f(x, y, z) = (2y + 2z, 2x - z, -x - y)$
- $g(x, y) = (-3x + 4y, 4x + 3y)$
- $h(x, y, z) = (x, 2x + 2y + 2z, -x + y + 3z)$

20. Sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V_3 y sea f una aplicación lineal de V_3 a V_3 dado por:

$$f(u_1) = u_1, f(u_2) = u_1 - 2u_2, Kerf = L[u_2 - u_3]$$

Se pide:

- La matriz de f respecto de la base B
- La imagen de f y su dimensión
- El polinomio característico y los autovalores de f
- Una base B' respecto de la cual la matriz de f es diagonal
- La matriz del cambio de base de B a B'